CHAPITRE V

APPLICATIONS LINÉAIRES

Table des matières

ECG 2 Maths appliquées, http://louismerlin.fr.

1. Définition et premières propriétés

1.1. **Définitions.** Une application linéaire est une application qui respecte les combinaisons linéaires. Plus précisément.

Proposition : Application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application de E dans F, c'est-à-dire pour tout $u \in E$, alors $f(u) \in F$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) • Pour tout couple de vecteurs $(u, v) \in E^2$, on a

$$f(u+v) = f(u) + f(v).$$

ET

• Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $u \in E$,

$$f(\lambda u) = \lambda f(u).$$

(b) Pour tout couple de réels (λ, μ), et tout couple de vecteurs $(u, v) \in E^2$, on a

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

(c) Pour tout couple de vecteurs $(u, v) \in E^2$, et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v).$$

Une application f qui vérifie l'une des trois conditions (a), (b) ou (c) ci-dessus est appelée **application linéaire**.

L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration. À compléter.

□

Exemple 1.1.1. **1.** L'application constante nulle $\theta : E \to F$ définie par $\theta(u) = 0_F$ pour tout $u \in E$ est linéaire de E dans F.

2. Les fonctions linéaires $x \mapsto ax$ (avec $a \in \mathbb{R}$) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont également des applications linéaires de l'espace vectoriel $\mathbb{R}(=\mathbb{R}^1)$ sur lui-même. C'est d'ailleurs parce que les applications linéaires de E dans F sont des généralisations de cet exemple qu'on les appelle de la même façon.

En particulier, si f est linéaire, alors, pour tous vecteurs u, v de E :

$$f(u+v) = f(u)+f(v), \qquad f(u-v) = f(u)-f(v), \qquad f(2u-3v) = 2f(u)-3f(v), \qquad f(5u) = 5f(u)$$

Méthode : Applications linéaire

Pour montrer qu'une application est linéaire d'une espace vectoriel E à valeurs dans un espace vectoriel F, on peut montrer que :

AL1 $f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$, pour tout vecteurs u et v de E, et tout réel λ.

AL2 $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ pour tous vecteurs u et v de E, et tous réels λ, μ.

AL3 $f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$ pour tous vecteurs u et v de E, et tout réel α.

En général, la méthode **AL3** est plus rapide à rédiger.

Exercice 1.1.2. Déterminer quelles sont les applications linéaires parmi les applications suivantes.

1. $$\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x-4y \\ 3x+y \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. $g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x;y) & \longmapsto & (2x-y;y;y-2x) \end{array}$.

3. g_2 l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g_2(x,y) = (2x+y-1;0;x-y)$.

4. k l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $k(P)(x) = xP'(x+1)$ (dérivée de P appliquée à $x+1$).
Par exemple, si $P(x) = x^3$, $k(P)(x) = x3(x+1)^2 = 3x^3+6x^2+3x$.

5. j l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $j(M) = AMA$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Définition : Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme

Soit E et F deux espaces vectoriels.

- Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E à valeurs dans $F = E$.
  On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Un **isomorphisme** est une application linéaire **bijective**.
  On note $\mathrm{GL}(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de E à valeurs dans F.
- Un **automorphisme** de E est un isomorphisme de E à valeurs dans $F = E$, autrement dit un endomorphisme bijectif de E.
  On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Remarque 1.1.3. Attention, les notations $\mathcal{L}(E)$, $\mathrm{GL}(E,F)$ et $\mathrm{GL}(E)$ semblent avoir disparu du programme...

Méthode : Endomorphisme

Pour montrer qu'une application linéaire est un endomorphisme de E, il faut :

1. montrer que $f(u)$ appartient à E pour tout vecteur u de E
2. montrer que f est linéaire

Définition : Application identité

Soit E un espace vectoriel. L'**application identité** de E, notée Id_E est définie par : $\mathrm{Id}_E(u) = u$ pour tout vecteur u de E.

On vérifie facilement que Id est un automorphisme de E.

1.2. Propriétés et caractérisations.

Proposition : Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$

Soit E et F deux espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel.

En particulier (à retenir) :

- la somme de deux (ou plus) applications linéaires est une application linéaire
- le produit d'une application linéaire par un nombre réel est une application linéaire
- une *combinaison linéaire* d'*applications linéaires* est *linéaire*

Démonstration. À compléter.

□

Remarque 1.2.1. L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ n'est pas un espace vectoriel, mais il est en revanche stable par composition : si f et g sont deux automorphismes de E, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des automorphismes de E.

(En effet, la composée de deux applications bijectives est elle-même bijective, et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.)

Ce n'est pas un espace vectoriel car elle ne contient pas l'application nulle (celle-ci n'est pas bijective).

Exercice 1.2.2. Quelles applications linéaires sont des endomorphismes dans l'exercice 1.1.2 ?

Proposition : Propriétés élémentaires des applications linéaires

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- $f\left(0_E\right)=0_F$: l'image du vecteur nul de E par une application linéaire de E dans F est le vecteur nul de F.
- $\forall u \in E,\ f(-u)=-f(u)$.
- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E, et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels. Alors :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\left(u_i\right)$$

c'est-à-dire :

$$f\big(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\ldots+\lambda_n u_n\big)=\lambda_1 f\left(u_1\right)+\lambda_2 f\left(u_2\right)+\ldots+\lambda_n f\left(u_n\right)$$

Autrement dit : l'image d'une *combinaison linéaire* de vecteurs par une *application linéaire* est égale à la *combinaison linéaire* des images de ces vecteurs.

Démonstration. À compléter. □

Méthode : Application non linéaire

En contraposant la première propriété, on obtient : si $f\left(0_E\right) \neq 0_F$ alors f n'est pas linéaire.

Exercice 1.2.3. L'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y)=(x ; x-y ; 2x+3y-1)$ est-elle linéaire ?

2. Noyau et image d'une application linéaire

2.1. Noyau.

Définition : Noyau d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

On note $\ker(f)$ et on appelle **noyau** de l'application linéaire f l'ensemble des antécédents dans E du vecteur nul de F :

$$\ker(f)=\big\{u \in E \text{ tel que } f(u)=0_F\big\}.$$

Autrement dit :

$$u \in \ker(f) \text{ si et seulement si } f(u)=0_F.$$

Le noyau $\ker(f)$ d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ contient tous les vecteurs de E dont l'image par f est égale au vecteur nul 0_F.

Proposition : Le noyau est un sous-espace vectoriel (de l'espace vectoriel de départ)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Alors le noyau $\ker(f)$ de f est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. À compléter.

□

Méthode : Noyau d'une application linéaire

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on peut résoudre l'équation $f(u) = 0_F$ où $u \in E$. En général, on obtient un système linéaire homogène (c'est-à-dire que le second membre est nul) à résoudre.

Si possible, on exprimera $\ker(f)$ comme un **sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs :**

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}\big(u_1, u_2, \dots, u_p\big)$$

(avec $u_1, u_2, \dots, u_p \in E$) et on pourra examiner si la famille est libre ou extraire une famille libre de cette famille génératrice.

Exercice 2.1.1. Déterminer le noyau des applications linéaires f, g_1, k et j de l'exercice 1.1.2. En trouver une famille génératrice puis une base.

On rappelle que f est injective si, et seulement si, $f(u) = f(u')$ implique $u = u'$.

Proposition : Lien entre noyau et injectivité

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application **linéaire**. Alors :

$$f \text{ est injective si et seulement si } \ker(f) = \big\{0_E\big\}.$$

Dans ce cas, on dit que le noyau est réduit au vecteur nul.

Démonstration. À compléter.

□

Exercice 2.1.2. Parmi les applications linéaires f, g_1, k et j de l'exercice 1.1.2, lesquelles sont injectives ?

2.2. **Image d'une application linéaire.** Pour une fonction numérique f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, l'image $f(I)$ désigne tous les réels y possédant au moins un antécédent par f.

Par exemple :

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x^2$, alors $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.
- Si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = \ln(x)$, alors $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.
- Si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = 3x + 1$, alors $f([0, 1]) = [1, 4]$.

Définition : Image d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $\mathrm{Im}(f)$ et on appelle **image** de f l'ensemble des vecteurs de F possédant (au moins) un antécédent par f.

En d'autres termes cet ensemble est constitué des images possibles pour f.

Proposition : L'image est un sous-espace vectoriel (de l'espace vectoriel d'arrivée)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Alors l'image $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. À compléter.

□

Méthode : Image d'une application linéaire

Pour trouver l'image d'une application linéaire, on peut chercher les conditions sur les vecteurs v pour lesquelles l'équation $f(u) = v$ d'inconnue u possède au moins une solution.

Si possible, on exprimera $\mathrm{Im}(f)$ comme un **sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs :**

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(v_1, v_2, \cdots, v_p\big)$$

(avec $v_1, v_2, \cdots, v_p \in F$) et on pourra examiner si la famille est libre ou extraire une famille libre de cette famille génératrice.

Exercice 2.2.1. Déterminer l'image des applications linéaires f et g_1 de l'exercice 1.1.2.

Proposition : L'image est engendrée par les images des vecteurs d'une base

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire et $\mathcal{B}_E = \big(e_1, e_2, \cdots, e_n\big)$ une base de E.

Alors la famille de vecteurs $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$ est **génératrice** de l'espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$.

Autrement dit :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))\,.$$

Démonstration. À compléter. □

Remarque 2.2.2.
- Attention, en général, $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ n'est pas une base de $\mathrm{Im}(f)$, mais seulement une famille génératrice. Par exemple, $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}.$$
Alors $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc la famille $\big(f(e_1), f(e_2)\big)$ est liée !
- Ce résultat est vrai avec n'importe quelle base de l'espace vectoriel de départ mais en général on utilise la base canonique.

Méthode : Image d'une application linéaire

Pour déterminer l'image d'une application linéaire $f : E \to F$, on peut considérer la base canonique $\big(e_1, e_2, \cdots, e_n\big)$ de l'espace vectoriel de départ E et écrire $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$. On cherchera ensuite à extraire une base de la famille génératrice obtenue.

Exercice 2.2.3. Déterminer l'image des applications linéaires k et j de l'exercice 1.1.2.

Une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Proposition : Lien entre surjectivité et image

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration. L'application f surjective si et seulement si $f(E) = F$. Or $f(E) = \mathrm{Im}(f)$. □

Exercice 2.2.4. Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x; y) & \longmapsto & (x+y; -y; x) \end{array}.$$

1. Montrer que f est une application linéaire. Est-ce un endomorphisme ?
2. Déterminer des bases de $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$.
3. Caractériser $\mathrm{Im}(f)$ par une ou plusieurs équations.
4. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

3. Théorème du rang et conséquences

3.1. Rang d'une application linéaire.

Définition : Rang d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire. Le **rang** de F est la dimension (si elle existe) du sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$:

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big).$$

Proposition : Lien entre surjectivé et rang d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels avec F de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire.

- En général, $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(F)$.
- f est surjective si, et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

En résumé : $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$ avec égalité si, et seulement si f est surjective.

Démonstration. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F donc $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \leqslant \dim(F)$ i.e. $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$.

- Si f est surjective, alors $\mathrm{Im}(f) = F$ donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.
- Réciproquement, si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$, alors le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$ a la même dimension que F et est inclus dans F, donc il est égal à F.

□

3.2. Théorème du rang et conséquences.

Théorème : Théorème du rang

Soit E et F deux espaces vectoriels, avec E de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire. Alors le noyau $\ker(f)$ et l'image $\mathrm{Im}(f)$ sont de dimension finies, et l'on a l'égalité :

$$\boxed{\dim(E) = \dim\big(\ker(f)\big) + \mathrm{rg}(f)}$$

Démonstration. Admis. □

Corollaire : Applications linéaires injectives ou surjectives entre espaces vectoriels de dimension finie

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. f est injective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.
   On a alors : $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.
2. f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.
   On a alors : $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.

Remarque 3.2.1. Et si f est bijective, on a nécessairement $\dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration. À compléter.

□

Exercice 3.2.2. Soit f l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x;y) = (x-2x; x-3y; 3x-y)$. f peut-elle être injective ? surjective ? bijective ?

Corollaire : Endomorphismes bijectifs d'un espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un **endomorphisme** de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est injectif,

ii) f est surjectif,

iii) f est bijectif.

Démonstration. À compléter.

□

Remarque 3.2.3. Ce résultat est en fait valable pour toute application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F **de même dimension (finie)**.

4. Matrice d'une application linéaire entre espaces de dimension finie

4.1. Définition.

Théorème : Matrice d'une applications linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels **de dimensions finies**, respectivement notées n et p. Soit $\mathcal{B}_E = \left(e_1, e_2, \cdots, e_n\right)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = \left(f_1, f_2, \cdots f_p\right)$ une base de F.

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors il existe une matrice A à p lignes et n colonnes telle que, pour tout vecteur u de E de matrice de coordonnées X relativement à la base $\mathcal{B}_E$, la matrice Y des coordonnées de $f(u)$ relativement à la base $\mathcal{B}_F$ vérifie la relation suivante :

$$Y = AX.$$

Cette matrice est appelée **matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$** et on note :

$$A = \mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

On obtient cette matrice en choisissant pour colonnes de A les coordonnées des vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$, ..., $f(e_n)$ exprimés dans la base $\mathcal{B}_F$.

Démonstration. À compléter.

□

Remarque 4.1.1. Dans le cas d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, si on prend $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F = \mathcal{B}_E$, on parle simplement de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4.1.2.

1. Soit E et F deux espaces vectoriels chacun muni d'une base $\mathcal{B}_E = \left(e_1, e_2, e_3\right)$ pour E et $\mathcal{B}_F = \left(f_1, f_2\right)$ pour F. On définit l'application linéaire $f : E \to F$ par :
$$f(e_1) = f_1 - f_2 \qquad f(e_2) = f_2 \qquad f(e_3) = f_1 + 4f_2.$$
   a. Déterminer la matrice A de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.
   b. Calculer $f(2e_1 + e_2 - e_3)$ de deux manières différentes : en utilisant la linéarité, ou en utilisant la matrice A.
2. Écrire les matrices relativement aux bases canoniques des applications linéaires f, g_1, k et j de l'exemple 1.1.2. Calculer $k(P)$ de deux manières différentes, pour $P(x) = x^2 + 3x + 1$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, dont A est la matrice dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Remarque 4.1.3 (De la matrice à l'application linéaire.). Si A est une matrice à p lignes et n colonnes, alors l'application f définie sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ par $f(X) = AX$ est linéaire, et sa matrice dans les bases canoniques est A.

Exercice type concours.

$E = \mathbb{R}_3[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. À tout élément P appartenant à E, on associe le polynôme $f(P)$ défini par $f(P)(x) = xP'(x) - P(x+1)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Donner sa matrice dans la base canonique de E.

3. Déterminer une base de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
4. f est-il un automorphisme de E ?
5. On considère le polynôme $Q(x) = x^2 + x + 1$. Déterminer, s'il(s) existe(nt), le (ou les) antécédents de Q par f.

Exercice type concours.

Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AMB \end{array}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Écrire la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice type concours.

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $B = \big(e_1, e_2, e_3\big)$ et E' un espace vectoriel muni d'une base $B' = \big(e'_1, e'_2\big)$. Soit f une application linéaire définie sur E par :

$$f(e_1) = e'_1 + e'_2 \qquad f(e_2) = -e'_1 + e'_2 \qquad f(e_3) = e'_2.$$

1. Écrire la matrice des coordonnées de l'image par f d'un vecteur u dont les coordonnées sont $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base B.
2. Déterminer la matrice de f relativement aux bases B et B'.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\ker(f)$.
4. Chercher tous les antécédents de e'_2.

Exercice type concours.

E désigne l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note B sa base canonique. Soit U la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

On définit l'application f de E dans E par $f(M) = UM + MU$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base B.
3. Déterminer le noyau et l'image de f. On précisera en particulier une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
4. f est-elle bijective ?

Exercice type concours.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application f de E dans E définie par $\big(f(P)\big)(x) = (x^2 - 1)P'(x) - 2xP(x)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E.
3. Déterminer le noyau et l'image de f. On précisera en particulier une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
4. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

4.2. Liens entre opérations sur les matrices et opérations sur les applications linéaires.

Proposition : Combinaison linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, chacun muni d'une base : $\mathcal{B}_E$ pour E, et $\mathcal{B}_F$ pour F.

Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F, de matrices respectives A et B relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, et λ et μ deux réels, alors $\lambda f + \mu g$ est une application linéaire, et sa matrice relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est $\lambda A + \mu B$. Autrement dit :

$$\mathrm{Mat}(\lambda f + \mu g; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \lambda.\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) + \mu.\mathrm{Mat}(g; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \lambda A + \mu B.$$

Démonstration. Immédiat. □

Remarque 4.2.1. En particulier :

$$\mathrm{Mat}(\lambda f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \lambda.\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$$

et :

$$\mathrm{Mat}(f + g; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) + \mathrm{Mat}(g; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$$

si f et g sont deux applications linéaires de E dans F, et λ un réel.

Exercice 4.2.2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x; y) = (x; x - y; y)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(x; y) = (y; y - x; x)$. Déterminer la matrice relativement aux bases canoniques de l'application $2f - 3g$.

Proposition : Composition

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, chacun muni d'une base : $\mathcal{B}_E$ pour E, $\mathcal{B}_F$ pour F et $\mathcal{B}_G$ pour G.

Si f est une application linéaire de E dans F de matrice A relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, et g une application linéaire de F dans G de matrice B relativement aux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G, de matrice $B \times A$ relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$. Autrement dit :

$$\mathrm{Mat}(g \circ f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) = \mathrm{Mat}(g; \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \times \mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = B \times A.$$

Démonstration. À compléter. □

Remarque 4.2.3. Ce théorème très important justifie *a posteriori* la définition du produit matriciel.

Exercice 4.2.4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x; y; z) = (2x - y; z; y)$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Expliciter g, donner la matrice de f dans la base canonique.
2. Déterminer l'expression de $g \circ f$, puis sa matrice.
3. Déterminer la matrice de $f \circ g$, puis une expression explicite de $f \circ g$.

Exercice 4.2.5. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) & \longmapsto & (x - y; 2y + z; y + z) \end{array}.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. f est-elle bijective ? Si oui, déterminer son application réciproque f^{-1}.
3. Donner par deux méthodes l'expression de $f \circ f$.

On s'intéresse au cas particulier où on compose une application linéaire avec elle-même.

Proposition : Puissance

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}_E$.

Si f est un endomorphisme de E, de matrice A relativement à la base $\mathcal{B}_E$, alors pour tout k entier naturel non nul, l'application f^k définie par

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$$

est une application linéaire et a pour matrice A^k dans la base $\mathcal{B}_E$. Autrement dit :

$$\mathrm{Mat}(f^k; \mathcal{B}_E) = \Big(\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}_E)\Big)^k = A^k.$$

Démonstration. C'est un cas particulier du résultat précédent. □

Exercice 4.2.6. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(e_1) = e_1 + e_2$ et $f(e_2) = e_2$, où $\mathcal{B} = \big(e_1, e_2\big)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la $\mathcal{B}$.

2. Calculer A^2, A^3 puis conjecturer A^n. Montrer cette conjecture par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire la matrice de l'application $g = f^4 = f \circ f \circ f \circ f$, puis l'expression explicite de $g(x; y)$.

Proposition : Bijection réciproque et inverse

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, chacun muni d'une base : $\mathcal{B}_E$ pour E, et $\mathcal{B}_F$ pour F.

Si f est une application linéaire de E dans F de matrice A relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, f est bijective si et seulement si A est inversible, et dans ce cas, l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est linéaire, et a pour matrice A^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$. Autrement dit :

$$\mathrm{Mat}(f^{-1}; \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E) = \Big(\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)\Big)^{-1} = A^{-1}.$$

Remarque 4.2.7. Dans ce dernier cas, la matrice à inverser est nécessairement carrée donc $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ ont le même nombre d'éléments, c'est-à-dire que l'on a obligatoirement $\dim(E) = \dim(F)$.

Exercice 4.2.8. On reprend f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x; y; z) = (2x - y; z; y)$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

f et g sont-elles bijectives ? Si oui, donner l'expression de leur bijection réciproque et leurs matrices respectives.

Il découle de la discussion qui précède le résultat théorique suivant.

Proposition : Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$ une base de F. L'application

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Mat} : & \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \end{array}$$

qui, à toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, associe sa matrice $\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, est un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

En conséquence : $\dim\left(\mathcal{L}(E, F)\right) = \dim\left(\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})\right) = n \times p = \dim(E) \times \dim(F)$.

4.3. **Rang d'une matrice.** Le rang d'une matrice est, par définition, le rang de l'application linéaire associée à cette matrice. Cette définition n'est jamais utilisée car on peut lire le rang d'une matrice sans avoir à en repasser par l'application linéaire. En effet :

Théorème : Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ est le rang de la famille de ses vecteurs-colonnes.
De plus $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.
Donc le rang de la matrice A est également égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes.

Démonstration. Admis. □

Exercice 4.3.1. Donner le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Proposition : Rang d'une matrice et rang d'une application linéaire

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ une matrice et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire dont A est la matrice relativement aux bases $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$ de F. Alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration. À compléter. □

Corollaire : Lien entre inversibilité et rang d'une matrice carrée

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si, et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

Démonstration. À compléter □

Méthode : Python

En Python, le rang d'une matrice s'obtient avec la fonction `matrix_rank()` de la bibliothèque `numpy.linalg`. Cette fonction sera énormément utilisée dans la suite du cours.

5. Sujets d'annales en lien avec ce chapitre.

Remarque 5.0.1. **1.** Assez peu de sujets font appel à ce chapître d'algèbre et au précédent, la quasi-totalité des problémes sont des problèmes de réduction des endomorphismes que nous étudierons dans un dernier chapitre. En voici néanmoins quelques uns, faisables dès maintenant.

1. ECRICOME
- 1990 Exercice 1.
- 1997 Exercice 2.

2. EDHEC
- 2001 Exercice 1.

3. EML
- 2002 Exercice 1.

4. ESCP
- 1986 épreuve III Exercice 1.
- 1999 épreuve III Exercice 1.

5. ESSEC
- 1990 épreuve III Exercice 2.

6. HEC
- 2014 Exercice.